შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 56-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა № 1

26.04.2015/ მათ/IV/ 709

ამოცანა № 4

გვერდი № 1

$(x-2)(x-4)P(x)=x(x+2)P(x-2)$

1. $x=2 \Rightarrow 2\cdot 4\cdot P(0)=0 \Rightarrow P(0)=0$ - 0 ფესვია P-სი
2. $x=4 \Rightarrow 4\cdot 6\cdot P(2)=0 \Rightarrow P(2)=0$ - 2 ფესვია P-სი.
3. $x=-2 \Rightarrow -4\cdot -6\cdot P(-2)=0 \Rightarrow P(-2)=0$ - -2 ფესვია P-სი

$$P(x)=x\cdot(x^2-4)G(x)$$

$(x-2)(x-4)P(x)=x(x+2)P(x-2)$

$(x-2)(x-4)x\boxed{(x-2)}(x+2)G(x)=x(x+2)(x-2)(x-4)\boxed{x}G(x-2)$

$$\Downarrow$$

$(x-2)\cdot G(x)=x\cdot G(x-2)$ სადაც $x\neq 2;4;-2;0$.

~~1. $x=2 \Rightarrow 2\cdot G(0)=0 \Rightarrow G(0)=0 \Rightarrow 0$ ფესვია G-სი.~~

~~$G(x)=x\cdot Q(x)$~~

~~$(x-2)G(x)=x\cdot G(x-2) \Rightarrow (x-2)xQ(x)=x(x-2)Q(x-2)$~~

ჯავუშვათ $\deg(G)=1 \Rightarrow (x-2)(ax+b)=x(ax-2a+b)$

$$\Downarrow$$

$-2ax-2b = -2ax \Rightarrow b=0$

$G(x)=ax \Rightarrow (x-2)\cdot x\cdot a=x\cdot a\cdot(x-2)$. ამონახსნია.

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 56-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა № 1	26.04.2015/ მათ/IV/ 709

ამოცანა № 4 — გვერდი № 1

განვიხილოთ $deg(G) \geq 2$. $G(x) = (x-x_1)(x-x_2)\dots$

$$\Downarrow$$

$$(x-2)\cdot(x-x_1)(x-x_2)\dots = x(x-x_1-2)(x-x_2-2)\dots = k(x).$$

$k(x)$-ის ფესვები იქნება (~~2 და 0-სგან განსხვავებული~~)

$x_1, x_2, \dots x_n$

$x_1+2, x_2+2, \dots x_n+2.$

★თუ $k(x)$-ს აქვს ნამდვილი ფესვები, განვიხილოთ მინიმალური x_m.

$$\underbrace{(x_m-2)(x_m-x_1)\dots(x_m-x_m)\dots}_{0} = \underset{\neq 0}{x_m}\,\underset{\neq 0}{(x_m-2-x_m)}\dots\underset{\neq 0}{(x_m-2-x_1)}\dots$$

$\forall x_i$-თვის $x_m - x_i - 2 < -2 \Rightarrow$ მარჯვენა მხარე არ ნულდება.

★თუ $k(x)$-ს აქვს კომპლექსური ფესვები, განვიხილოთ ისეთი, რომ $z+\bar{z} = \min$, ანუ $R(z) = \min$. მაშინ:

$$(z-2)(z-z_1)\dots(z-z) = \underset{\neq 0}{z}\,\underset{\neq 0}{(z-2-z_1)}\dots\underset{\neq 0}{(z-2-z)}$$

$z - z_i - 2$, $\forall i$-თვის $\Rightarrow z - z_i \neq 2 = R(z) - R(z_i) - 2 + I(z) - I(z_i) < -2$

თუ გვინდა ტოლობა: $R(z)-R(z_i)-2+I(z)-I(z_i)=0$

$$\Downarrow$$

$$I(z)=I(z_i).$$

$$R(z)=R(z_i)+2 \Rightarrow R(z)>R(z_i)$$ წინააღმდეგობა

ანუ ~~$G(x)$~~ $\cdot \deg(G)=1. \Rightarrow G(x)=a\cdot x.$

შემოწმება: $\cancel{R(x)=a\cdot x^2\cdot(x^2-4)(x+2)(x-4)}.$

$$P(x)=a\cdot x^2\cdot(x^2-4).$$

$$(x-4)(x-2)\cdot a\cdot x^2\cdot(x-2)(x+2)=x(x+2)a\cdot(x-2)(x-2)(x-4)x$$

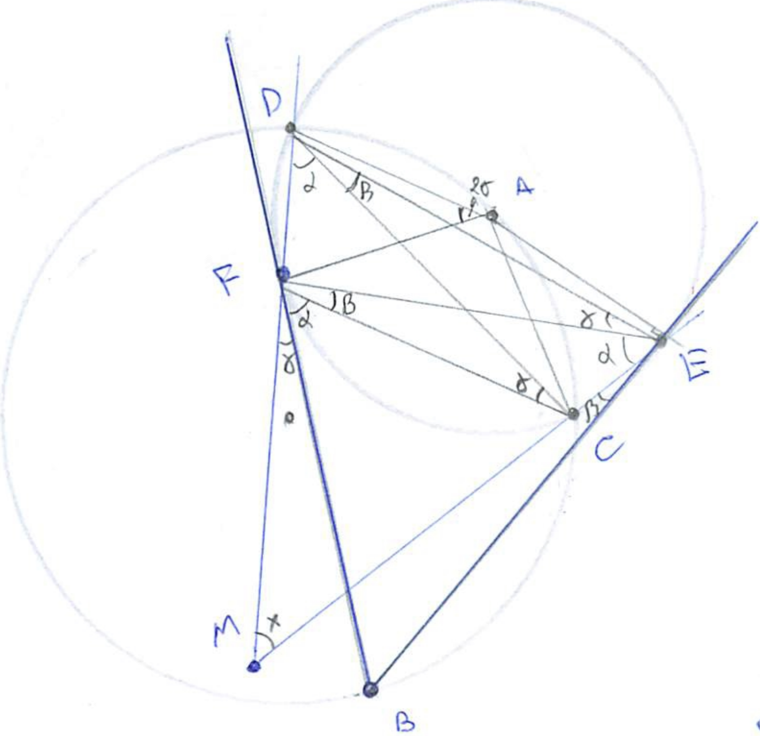
შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 56-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა № 1 | 26.04.2015/ მათ/IV/ 709

ამოცანა № 5 | გვერდი № 1



$\angle DCF = \gamma$

$\angle EFC = \beta$

$\angle BFC = \alpha$

$\angle DME = x$

- $\angle DCF = \frac{\overset{\frown}{FD}}{2} = \frac{\angle FAD}{2} \Rightarrow \angle FAD = 2\gamma$
- $\angle CFE = \angle CDE = \beta$ რადგან ციკლურია $CFDE$.
- $\angle BFC = \angle MDC = \alpha$ რადგან AB მხები
- $\angle MFB = \angle FED = \angle CFD = \gamma$
- $\angle MEF = \angle CDF = \alpha$

. ΔMFE-ში $\Rightarrow x + 2\alpha + \beta + \gamma = 180$.

$\angle ADC = \frac{180 - 2\gamma}{2} - \alpha = 90 - \alpha - \gamma = \frac{x}{2} + \frac{\beta}{2} - \frac{\gamma}{2}$. [$\cdot$ $AD = AF$ რადგან A ცენტრია ω_{DFCE}-ის]

$AD = AF = AC = AE$; რადგანაც $DACB$ ციკლურია $\Rightarrow$ ~~$\angle CAB = \angle DAB$~~.

რადგანაც BF და BE მხებები არის, A ცენტრია $\Rightarrow$ $\angle CBA = \angle ABD$.

$\Rightarrow BF = BE$; $AF \perp BF$, $AE \perp BE$; $AB \perp FE$, ცნობილია $\Delta BAC \cong \Delta BAF$,

$\angle EBA = \angle FBA$.

რადგანაც DACB ციკლურია. $\angle ADC = \angle ABC = \angle ABD =$
$= \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} - \frac{\gamma}{2}$.

ვიცით, ვაჩვენოთ რომ $\angle EBC = \angle FBD$

$\angle EBC = \angle ABE - \angle ABC = \angle FBA - \angle DBA = \angle FBD$.

ახლა ვიცით! $FE \perp AB \Rightarrow \angle EFB + \angle FBA = 90$

$\angle EFB + \angle FBA = \alpha + \beta + \angle FBD + \angle ABD = \alpha + \beta + \angle FBD + \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} - \frac{\gamma}{2} = \alpha + \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2}$

$\angle FBD = \gamma - \beta = \angle CBE$.

$\angle MCB = \angle CBE + \angle CED = \cancel{\gamma + \beta +}) \gamma - \beta + \beta = \gamma$.

$\angle MFB = \gamma$, ანუ MBFC ციკლურია

($\angle CEB = \beta$ რადგან BE მხები ω_{CFDE}-სა ... $\angle MEB = \angle CFE$)

შესაძლოა M წერტილი აღმოჩნდეს წრეწირის გარეთ (ანუ შეიძლება არა), მაგრამ იგივე მსჯელობა (ვექტორების დახმარებით) დამტკიცდება

რადგანაც $AD = AC \Rightarrow \overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{AC} \Rightarrow \angle DAB = \angle ABC$.

G-ვის n-ეული იქნება:

$|x_{j_1}|$ – 1-ლი. $|x_{j_1}| \le |x_{j_2}|$
$\vdots$
$|x_{j_1}| \le |x_{j_n}|$

$|x_{j_1}+x_{j_2}|$ – მე-2 $|x_{j_1}+x_{j_2}| \le |x_{j_1}+x_{j_3}|$

1. $x_{j_1} \ge 0$, $x_{j_2} \ge 0$ $\Rightarrow$ $|x_{j_2}| \le |x_{j_3}|$
$\vdots$
$|x_{j_2}| \le |x_{j_n}|$

2. $x_{j_1} \ge 0$, $x_{j_2} < 0$ $\Rightarrow$ ...

$|x_{j_1}+\ldots+x_{j_n}|$ – მე-n. $|a+b| \le |a|+|b|$,

$|x_{j_1}+\ldots+x_{j_t}| = G$ $|x_{i_1}+\ldots+x_{i_t}| \le |x'_1+\ldots+x'_t|$ (a'-ი a-ს ...)

$|x_{i_1}+\ldots+x_{i_k}| = D$ $|x_{j_1}+\ldots+x_{i_k}| \le$ $|x_{i_1}|$, $|x_{i_1}+x_{i_2}|$, ..., $|x_{i_1}+\ldots+y_{i_n}|$

$2|x_{i_1}+\ldots+x_{i_k}| \geq |x_{j_1}+\ldots+x_{j_t}|$

~~სულ~~

სულ გვექნება $n!$ n-ეული $\Rightarrow$ $n!$ ვარი. ~~თითოეული ვარი გვქონ.~~

~~ჩვეულებრივ იქნება~~ ~~C_n^k~~ ~~ვარი~~ (თუ k სვლისაა) ~~$(n-k)!$ ვარი.~~